両面性市場におけるプラットフォーム戦略に関する研究

ビジネス科学研究科 企業科学専攻　　海野 大

2012年 1 月 28日

主指導教員：徐驊教授　　副指導教員：牧本 直樹 教授，倉橋 節也 准教授

1　序論

「両面性市場（Two-Sided Market）」とは，属性の異なるグループが存在し，両者が取引することで利益を得ることができ，かつその取引に必ず仲介者が存在するような市場を言う．また，取引仲介者を「プラットフォーム（Platform; PF）」という．属性の異なるグループとは，例えば，財の売手と買手などである．このような売手や買手をプラットフォームへの「参加者」とも呼ぶ．

両面性市場は Rochet and Tirole(2003)[3]を嚆矢として，近年，活発に研究されている．両面性市場の特徴は，異なるグループ間に「間接ネットワーク効果」が存在することである．ところが，潜在的取引相手が多ければ多いほど，取引コストは逆に大きくなるので，十分な需要と供給があるにも関わらず効率的な市場取引が実現しない，つまり，市場の失敗が生じる．このとき，もし，プラットフォームが効果的に仲介を行えば，取引コストは低下し，参加者相互で活発に取引が行われるであろう．両面性市場とは，プラットフォームの存在によって，参加者がネットワーク効果を享受ならしめている市場と言える．

両面性市場に関する研究の主たるテーマの一つは，プラットフォームはどうしたら収益を最大化できるかである．プラットフォームが収益を拡大するためには，A. 市場参加者（プラットフォームへの参加者）の増，B. 市場参加者間の取引量の増が必要である．ここでは，参加者に対してどのようにインセンティブを与えるか，という観点から，A. B. を次のように呼ぶ：A. 参加インセンティブ問題，B. 取引インセンティブ問題．プラットフォームにとって A. B. いずれの問題が重要かは，プラットフォームの収益構造に依存し，それは料金体系が関連している．「収益構造」と「参加／取引インセンティブ」は，両面性市場を分析する 2 つの視点を与えるものである．

表 1　プラットフォームの課題と収益構造

		プラットフォーム		
		課題	収益構造	料金体系
参加者	参加是非の意思決定	参加インセンティブ問題	参加者数依存	会費型
	取引実施の意思決定	取引インセンティブ問題	取引量依存	手数料型

本論文では，プラットフォームと参加者のインタラクティブな取引行動に焦点を当て，市場内の取引量を拡大するように参加者にインセンティブを与えつつ自社への配分を最大化するプラットフォーム戦略について研究する．具体的には，プラットフォームと参加者の関係をプラットフォームをプリンシパル，参加者をエージェントとするプリンシパル-エージェント問題として捉え，Sannikov(2008)[5]のモデルを応用し，以下のアプローチで最適な PF 戦略を求める：(1) E- コマースやコンテンツ配信市場など具体的な両面性市場を取り上げ，プラットフォームと参加者の行動，収益配分の構造をモデル化し，(2) 動学的プリンシパル-エージェント・モデルを用いて，プラットフォームの最適化問題を定式化，(3) 最適解の存在を証明し，数値シミュレーションで実際に解を求め，(4) 得られた結果から，実務的な意味合いを考察する．

本論文は，第 1 章：序論，第 2 章：従来研究と本論文の位置づけ，第 3 章：E- コマース市場におけるショッピングモールと店舗の動的収益配分，第 4 章：コンテンツ配信市場における収益配分と ISP の投資インセンティブ，第 5 章：スマートフォン市場における最適プラットフォーム戦略，第 6 章：結論からなる．第 3 章から第 5 章の研究の関連は図 1 のとおりである．

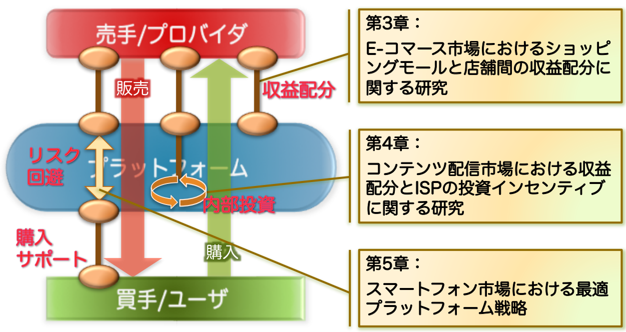

図 1　論文の構成

2　従来研究と本論文の位置づけ

両面性市場に関する従来研究（Rochet and Tirole(2003)[3] Rochet and Tirole(2006)[4]，Armstrong(2006)[1] Hagiu(2009)[2]等）は，参加者数依存型収益構造のプラットフォームを（暗黙のうちに）前提として，A. の問題の分析に集中している．そこで，本論文では，研究蓄積が手薄なプラットフォームと参加者のインタラクティブな取引行動に焦点を当てることで，両面性市場に関する研究の更なる発展に貢献することを目的とする．

3　E-コマース市場におけるショッピングモールと店舗の動的収益配分

本章では，両面性市場の中でも E- コマース（電子商取引）を取り上げ，ショッピングモールと店舗との間における収益配分問題を考察する．モールの問題は，店舗がより一層の努力を行うことで市場内の取引量を増加させつつ，モールへの収益配分を最大化するような配分戦略を求めることである．

3.1　問題の設定

店舗の時刻 t までの累計売上 $X(t)$ は以下のブラウン運動に従うものとする：

$$dX(t) = q(a(t))N(0)dt + \sigma N(0)dZ(t). \tag{1}$$

ここで，$Z = \{Z(t), F(t); 0 \leq t < \infty\}$ は標準ブラウン運動で，σ は定数，$\{F(t); 0 \leq t < \infty\}$ は $\{X(t); 0 \leq t < \infty\}$ によって生成されるフィルトレーション．$N(0)$ はモールと店舗が契約を締結する時刻 0 においてモールに参加登録している消費者の人数．$a(t)$ は時刻 t において店舗が行う開発努力水準．$q(a(t))$ は消費者にとっての商品の魅力度を示す品質関数であり，$a(t)$ に関して連続で厳密に増加かつ凹，また，$q(a(t)) \in [0, 1], 0 < a(t) < \bar{a}$.

店舗の売上 $X(t)$ は，契約に定められた条件に従いモール-店舗間で配分されるものとし，時刻 t に店舗に配分される額を $\gamma(t) \in [0, \infty)$ で表す．店舗は配分 γ_t を受け取ることで $u(\gamma(t))$ の効用を得る．店舗はリスク回避的であり，$u(\gamma(t))$ は増加かつ凹で C^2 級の関数とし，$u(0) = 0$．店舗は $a(t)$ の開発努力を行うために，$h(a(t))$ の開発費用を負担する．$h(a(t))$ は配分 $\gamma(t)$ と同一の

単位で測られ，連続で厳密に増加かつ凸とする．モールはリスク中立的とする．また，モールには $\beta dX(t)$，β は定数，の費用が発生する．

割引率を r とすると，店舗が $a_t, 0 \le t < \infty$ の開発努力を行うときの店舗の総期待利得は $\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-rt}\Big(u(\gamma(t)) - h(a(t))\Big)dt\right]$，モールの期待利得は $\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-rt}dX(t) - \int_0^\infty e^{-rt}\gamma(t)dt - \int_0^\infty e^{-rt}\beta dX(t)\right]$ となる．

3.2　モールの問題

モールは店舗の利得最大化行動を前提に，モールの利得を最大化するような開発努力水準 $a = \{a(t)\}$ を店舗に推奨し，そして，実際に店舗に推奨努力水準を遂行させせられる配分戦略 $\gamma = \{\gamma(t)\}$ を決定したい．

$$\max_{\gamma, a}\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-rt}dX(t) - \int_0^\infty e^{-rt}\gamma(t)dt - \int_0^\infty e^{-rt}\beta dX(t)\right], \quad (2)$$

$$\text{s.t.} \qquad \text{（状態方程式）} \quad dX(t) = q(a(t))N(0)dt + \sigma N(0)dZ(t), \quad (1)$$

$$\text{（参加制約）} \quad \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-rt}\Big(u(\gamma(t)) - h(a(t))\Big)dt\right] \ge 0, \quad (3)$$

$$\text{（誘因両立制約）} \quad a(t) \in \arg\max_{\tilde{a}(t)}\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-rt}\Big(u(\gamma(t)) - h(\tilde{a}(t))\Big)dt\right]. \quad (4)$$

3.3　最適配分

任意の配分 $\gamma = \{\gamma(t) : \gamma(t) \in [0, \overline{\gamma(t)}]\}$ と任意の開発努力戦略 $a = \{a(t) : a(t) \in [0, \bar{a}]\}$ に対する店舗の継続価値を以下で定義する：

$$W(t; \gamma, a) = \mathbb{E}_a\left[\int_t^\infty e^{-r(s-t)}\Big(u(\gamma(s)) - h(a(s))\Big)ds\,\Big|\,\mathcal{F}(t)\right]. \quad (5)$$

継続価値が (5) で与えられるとき，$\mathcal{F}(t)$ 可測な適合過程 $Y(t)$ が存在し，以下のように展開できることが示される（**命題 1**）：

$$dW(t; \gamma, a) = \big[rW(t; \gamma, a) - u(\gamma(t)) + h(a(t))\big]dt + \sigma N(0)Y(t)dZ(t). \quad (6)$$

さらに，誘因両立制約について，店舗の戦略 a が最適であるための必要十分条件は以下となることが示される（**命題 2**）：

$$a(t) \in \arg\max_{\tilde{a}(t)\in[0,\bar{a}]} Y(t)q(\tilde{a}(t))N(0) - h(\tilde{a}(t)), \; 0 \le t < \infty. \quad (7)$$

これより，$Y(t) = \frac{h'(a(t))}{q'(a(t))N(0)} = y(a(t)) > 0$.

以上から，モールが得られる最大収益を $\Pi(W_t)$ とすると，店舗の誘因両立制約を満たすモールの最適配分問題は確率最適制御問題として定式化できる：

$$\Pi(W(t)) = \max_{\gamma, a}\mathbb{E}\left[\int_t^\infty e^{-r(s-t)}\Big((1-\beta)q(a(s))N(0) - \gamma(s)\Big)ds\right] \quad (8)$$

$$\text{s.t.} \quad dW(t) = \big[rW(t) - u(\gamma(t)) + h(a(t))\big]dt + \sigma N(0)y(a(t))dZ(t). \quad (9)$$

この問題は，次の HJB 方程式

$$r\Pi(W) = \max_{\gamma, a}(1-\beta)q(a)N(0) - \gamma + \Big(rW - u(\gamma) + h(a)\Big)\Pi'(W) + \frac{1}{2}\sigma^2 N(0)^2 y(a)^2 \Pi''(W) \quad (10)$$

を解くことによって解を得ることができ，さらに，得られた解 $a(t), \gamma(t)$ が問題の最適解となることが示せる（**命題 3**）．

HJB 方程式の解は数値計算によって求められる．図 2 は各関数，パラメータを特定化したときの収益関数 $\Pi(W)$，最適努力及び最適配分である．

3.4　考察

前節の結果について，次の考察を加える：1. モールに参加している消費者数 N0 が異なると，店舗の努力水準に影響はあるのか？，2. 配分が継続価値ベースでなく，近視眼的[*1] に決められるとしたらどうか？．

1. については，数値計算の結果，消費者の多いショッピングモールに参加する店舗ほどより大きな努力を行い，モールはより大きな収益を得ることがわかった．このことは，既に多数のエンドユーザを有する大企業がプラットフォームとなっている両面性市場に，小企業が参入しても勝算は低く，逆に，多数のエンドユーザを有する大企業が後発でプラットフォームとして参入すると，成功する可能性があることを示唆している．

また，2. については，リスク・プレミアムを考慮して店舗に配分すると，モールの収益は赤字になり，かつ，店舗の努力水準は継続価値ベースより低くなることがわかった．近視眼的配分は単純でわかりやすいが，モールの収益最大化のためには継続価値ベースの配分の方が有利と言える．

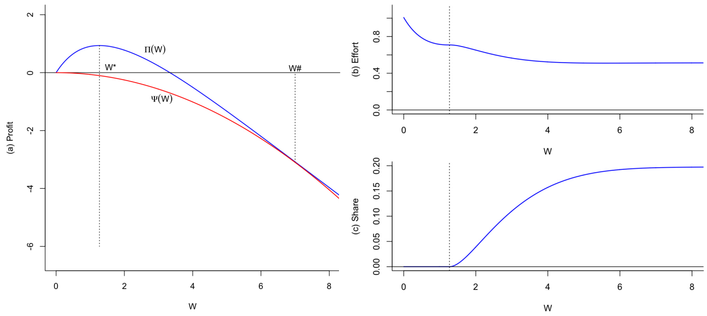

図 2　$q(a) = a, u(\gamma) = \sqrt{\gamma}, h(a) = 0.5a^2 + 0.5a, N_0 = 1, r = 0.1, \beta = 0.1, \sigma = 1$ のときの (a) モールの収益，(b) 最適努力，(c) 最適配分戦略

3.5　おわりに

本研究は，モールと店舗間の収益配分問題を確率最適制御問題として定式化し，かつ HJB 方程式を用いた解法を示すことができた．この結果は，現実にショッピングモールが店舗と契約する際，配分条件を決定する上でのベンチマークとして用いることが可能である．

4　コンテンツ配信市場における収益配分と ISP の投資インセンティブ

本章では，インターネット上のコンテンツ配信市場を取り上げ，コンテンツ・プロバイダ（CP）が売上の一部をインターネット・サービス・プロバイダ（ISP）に支払うことが ISP の投資インセンティブを高め，ネットワークが増強されることによって市場全体の成長に繋がることを示す．

4.1　問題の設定

今，インターネットは相互接続する CP と ISP の 2 社によって構成されるものとする．時刻 $t \in [0, \infty)$ の ISP のネットワーク容量を $C(t) > 0$ とする．ネットワーク容量は単位時間あたり定数 δ の比率で減耗し，ISP が時刻 t に投下する設備投資量を $I(t)$ とすると，$C(t)$ は次のように展開される：

$$dC(t) = (I(t) - \delta C(t))dt. \quad (11)$$

また，設備投資には調整費用 $g(I, C) := \frac{\theta I^2}{2C}$ を要するものとする．ISP のネットワーク容量は ISP，CP の双方が観測可能とする．

時刻 t における CP の累計売上 $X(t)$ は，コンテンツのダウンロード量，すなわち ISP のネットワーク容量 $C(t)$ [*2] と，CP の継続的なコンテンツ開発努力，及び CP の努力によらない確率的な変動要因によるものとし，以下のブラウン運動に従うものとする：

$$dX(t) = p(a(t))C(t)dt + \sigma C(t)dZ(t). \quad (12)$$

ここで，$Z = \{Z(t), \mathcal{F}(t); 0 \le t < \infty\}$ は標準ブラウン運動で，σ は定数，$\{\mathcal{F}(t); 0 \le t < \infty\}$ は $\{X(t); 0 \le t < \infty\}$ によって生成されるフィルトレーション．$a(t)$ は時刻 t において CP が行う開発努力，$p(a(t))$ は $a(t)$ の関数として決まるコンテンツの単位データ量当たりの価値．ISP は CP の努力水準を観測できない．

時刻 t に CP が ISP に配分した後の残余額を $\gamma(t)C(t) \in [0, \infty)$ とする（$\gamma(t)$ は単位データ量当りの残余分）．CP は残余額 $\gamma(t)C(t)$ を得ることで

[*1] 近視眼的配分とは毎時刻 t の売上 X_t に応じて配分 $\gamma(t)$ を決定するもの．

[*2] ダウンロード量は ISP のネットワーク容量 $C(t)$ に制約される．本章では，コンテンツのダウンロード量とネットワーク容量は常に一致しているものとする．

$u(\gamma(t))C(t)$ の効用を得るものとする．CP はリスク回避的であり，$u(\gamma(t))$ は増加かつ凹で 2 階微分可能とし，$u(0)=0$．CP は $a(t)$ の開発努力を行うために，$h(a(t))C(t)$ の開発費用を負担する．$h(a(t))$ は $\gamma(t)$ と同一の単位で測られ，連続で厳密に増加かつ凸．ISP はリスク中立的とする．ISP には設備投資量に応じて $\lambda I(t), \lambda$ は定数，の投資支出，及びネットワーク容量に応じた費用 $\beta C(t), \beta$ は定数，が発生する．

割引率を r とすると，CP が $a(t), 0 \le t < \infty$ の開発努力を行うときの CP の総期待収益は $\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-rt}\Big(u(\gamma(t)) - h(a(t))\Big)C(t)dt\right]$，ISP の期待収益は $\mathbb{E}\Bigg[\int_0^\infty e^{-rt}dX(t) - \int_0^\infty e^{-rt}\gamma(t)C(t)dt - \int_0^\infty e^{-rt}\lambda I(t)dt - \int_0^\infty e^{-rt}g(I(t),C(t))dt - \int_0^\infty e^{-rt}\beta C(t)dt\Bigg]$ となる．

なお，CP と ISP 間配分がなされない場合の ISP の設備投資量と CP の努力水準は，それぞれ，$I(t)=\delta C(t)$，$p'(a)=h'(a)$ として決まる．

4.2 ISP の問題

ISP は CP の利得最大化行動を前提に，収益を最大化するような開発努力水準 $a=\{a(t)\}$ を CP に推奨し，そして，実際に CP に推奨努力水準を遂行させられる配分戦略 $\gamma=\{\gamma(t)\}$ を決定したい．

$$\max_{\gamma,a}\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-rt}\Big(\big(p(a(t))-\gamma(t)-\beta\big)C(t)-\lambda I(t)-g(I(t),C(t))\Big)dt\right], \tag{13}$$

$$\text{s.t.}\quad (\text{売上})\quad dX(t)=p(a(t))C(t)dt+\sigma C(t)dZ(t), \tag{12}$$

$$(\text{ネットワーク容量})\quad dC(t)=(I(t)-\delta C(t))dt, \tag{11}$$

$$(\text{参加制約})\quad \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-rt}\Big(u(\gamma(t))-h(a(t))\Big)C(t)dt\right]\ge 0, \tag{14}$$

$$(\text{誘因両立制約})\quad a(t)\in\arg\max_{\tilde{a}(t)}\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-rt}\Big(u(\gamma(t))-h(\tilde{a}(t))\Big)C(t)dt\right]. \tag{15}$$

4.3 最適配分及び投資

時刻 $t, 0\le t<\infty$ までの状態がわかっており，t 以降における CP の任意の単位残余分 $\gamma=\{\gamma(t):\gamma(t)\in[0,\overline{\gamma(t)}]\}$ 並びに投資 $I=\{I(t):I(t)\in[0,\infty)\}$ が決められ，それに対して CP が任意の開発努力戦略 $a=\{a(t):a(t)\in[0,\overline{a}]\}$ をとるとき，時刻 t における CP の継続価値を以下で定義する：

$$W(t;\gamma,I,a)=E_a\left[\int_t^\infty e^{-r(s-t)}\Big(u(\gamma(s))-h(a(s))\Big)C(s)ds\,\middle|\,\mathcal{F}(t)\right]. \tag{16}$$

CP の継続価値が (16) 式で定義されるとき，$\mathcal{F}(t)$ 可測な適合過程 $Y(t)$ が存在し，$W(t;\gamma,I,a)$ は以下のように展開される（**命題 1**）：

$$dW(t;\gamma,I,a)=\Big(rW(t;\gamma,I,a)-\big(u(\gamma(t))-h(a(t))\big)C(t)\Big)dt+\sigma Y(t)C(t)dZ(t). \tag{17}$$

さらに，誘因両立制約を満たす CP の努力 a が最適であるための条件は以下となる（**命題 2**）：

$$a(t)\in\arg\max_{\tilde{a}(t)\in[0,\overline{a}]}\big(Y(t)p(\tilde{a}(t))-h(\tilde{a}(t))\big)C(t),\ 0\le t<\infty \tag{18}$$

これより，$Y(t)=\frac{h'(a(t))}{p'(a(t))}=y(a(t))>0$．

さて，時刻 t における CP の継続価値 $W(t)$ がわかっており，CP が最適な開発努力 $a(t)$ を行い，ISP が $\gamma(t)$ を適切に設定すると共に最適な投資 $I(t)$ を行うとき，ISP が得られる最大収益を $\Pi(W,C)$ とすると，CP の誘因両立制約を満たす ISP の最適化問題は次の確率最適制御問題として定式化できる：

$$\Pi(W,C)=\max_{\gamma,I,a}\mathbb{E}\Bigg[\int_t^\infty e^{-r(s-t)}\Big(\big(p(a(s))-\gamma(s)-\beta\big)C(s)-\lambda I(s) - g(I(s),C(s))\Big)ds\Bigg] \tag{19}$$

$$\text{s.t.}\quad dW(t)=\Big(rW(t)-\big(u(\gamma(t))-h(a(t))\big)C(t)\Big)dt+\sigma y(a(t))C(t)dZ(t), \tag{20}$$

$$dC(t)=(I(t)-\delta C(t))dt. \tag{11}$$

さらに，ISP の収益がネットワーク容量に関して収穫不変（1 次同次）であることを用いると，以下の HJB 方程式が得られる：

$$(r+\delta)\pi(w)=\max_{\gamma,a}\,p(a)-\gamma-\beta+\frac{(\pi(w)-w\pi'(w)-\lambda)^2}{2\theta} +\Big((r+\delta)w-u(\gamma)+h(a)\Big)\pi'(w)+\frac{1}{2}\sigma^2y(a)^2\pi''(w) \tag{21}$$

ISP の問題は HJB 方程式を解くことによって得られ，その解 $a(t)$，$\gamma(t)$ は ISP の最適化問題の最適解であることを示せる（**命題 3**）．

図 3 は各関数，パラメータを特定化したときの収益関数 $\pi(w)$，及び最適努力，最適配分，最適投資率を示している．一方，配分のない場合，CP の努力水準は配分がなされる場合より低水準となっており，また，配分のないときの ISP の投資率は配分がなされるときの投資率を下回る．

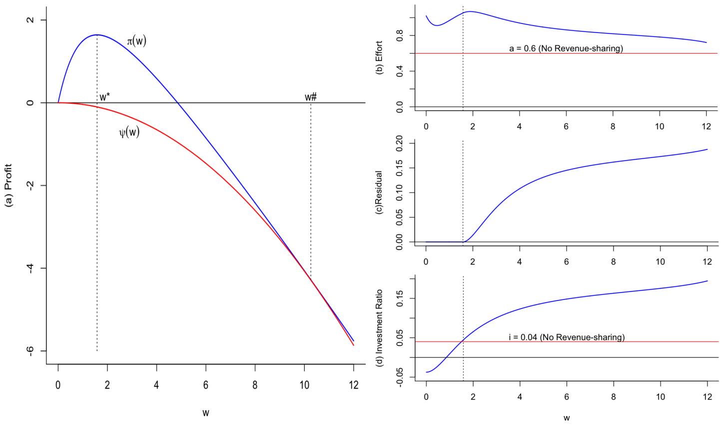

図 3　$p(a)=a, u(\gamma)=\sqrt{\gamma}, h(a)=0.5a^2+0.4a, r=0.11, \delta=0.04, \theta=20, \beta=0.1, \lambda=0.75, \sigma=1$ のときの (a) CP のスケール調整後の継続価値と ISP の収益関数，(b) 最適努力，(c) 配分及び投資率

4.4 おわりに

本章の結果は，CP から ISP への収益再配分が，CP の努力水準と ISP の投資率，すなわちインターネット市場全体の生産水準を高める可能性のあることを示唆している．レイヤ間の相互干渉を否定するネットワーク中立性の理念とは異なり，ISP のネットワーク拡大投資のために CP が収益の一部を配分することにも一定の合理性があり得ることが示された．

5 スマートフォン市場における最適プラットフォーム戦略

本章では，近年利用者が急増しているスマートフォン市場を取り上げ，購入サポートのための費用負担をしなければならないリスク回避的なスマートフォン・プラットフォーム（SPF）とアプリケーション・プロバイダ（AP）間の収益配分問題をリスク-センシティブ確率制御問題として定式化し，分析する．

5.1 問題の設定

SPF が有している加入者のうち，AP のアプリケーションを購入する者の数は，AP の継続的な開発及び販売努力，加入者の総数 $N(0)$，及び AP の努力によらない確率的な変動要因に依っており，時刻 t に AP のアプリケーションを購入する延べ加入者数 $X(t)$ は以下のブラウン運動に従うものとする：

$$dX(t)=q(a(t),\mu(t))N(0)dt+\sigma N(0)dZ(t). \tag{22}$$

ここで，$Z=\{Z(t),\mathcal{F}(t);0\le t<\infty\}$ は標準ブラウン運動で，σ は定数，$\{\mathcal{F}(t);0\le t<\infty\}$ は $\{X(t);0\le t<\infty\}$ によって生成されるフィルトレーション．$a(t)$ は AP の開発努力，$\mu(t)$ は SPF の購入サポート，$q(a(t),\mu(t))$ はアプリケーションの魅力度．$q(a(t),\mu(t))$ は $a(t),\mu(t)$ に関して厳密に増加かつ凹で連続微分可能，$\frac{\partial q(a,\mu)}{\partial a}=q_a(a,\mu)<\infty$，$\frac{\partial q(a,\mu)}{\partial \mu}=q_\mu(a,\mu)<\infty$，また $q(a(t),\mu(t))\in[0,1], (a(t),\mu(t))\in[0,\overline{a}]\times[0,\overline{\mu}]$ とする．

AP は時刻 t に配分 $\gamma(t), t\in[0,\infty)$ を受け取ることで $u(\gamma(t))$ の効用を得る．効用関数 $u(\gamma(t))$ は増加かつ凹で連続微分可能，$u'(\cdot)<\infty$ とし，$u(0)=0$．

さらに，AP は $a(t)$ の開発努力を行うために，$h(a(t))$ の開発費用を負担する．$h(a(t))$ は効用 $u(\gamma(t))$ と同一の単位で測られ，厳密に増加かつ凸で連続微分可能，$h'(\cdot) < \infty$ とする．今，AP が $a(t), 0 \le t < \infty$ の開発努力を行うとき，AP の総期待効用は $\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-rt}\Big(u(\gamma(t)) - h(a(t))\Big)dt\right]$．但し，$r$ は割引率．

SPF には店舗の売上に応じた $\beta dX(t)$，β は定数，の費用，及び加入者への購入サポートのために $c(\mu(t))$ の費用が発生する．$c(\mu(t))$ は厳密に増加かつ凸で連続微分可能，$c'(\cdot) < \infty$．SPF の期待収益は $\mathbb{E}\Big[\int_0^\infty e^{-rt}dX(t) - \int_0^\infty e^{-rt}\gamma(t)dt - \int_0^\infty e^{-rt}c(\mu(t))dt - \int_0^\infty \beta dX(t)\Big] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-rt}\Big((1-\beta)q(a(t),\mu(t))N(0) - \gamma(t) - c(\mu(t))\Big)dt\right]$．SPF はリスク回避的で，以下の効用関数を有するものとする（ρ はリスク感度）：

$$\mathbb{E}\left\{-\exp\left[-\rho\int_0^\infty e^{-rt}\Big((1-\beta)q(a(t),\mu(t))N(0) - \gamma(t) - c(\mu(t))\Big)dt\right]+1\right\}. \tag{23}$$

5.2 最適配分及び購入サポート

時刻 $t, 0 \le t < \infty$ までの状態が既知で，t 以降における AP の任意の配分 $\gamma = \{\gamma(t) : \gamma(t) \in [0, \bar{\gamma}(t)]\}$，購入サポート $\mu = \{\mu(t) : \mu(t) \in [0, \bar{\mu}]\}$ が決められ，それに対し AP が任意の努力戦略 $a = \{a(t) : a(t) \in [0, \overline{a}]\}$ をとるとき，時刻 t における AP の継続価値を以下で定義する：

$$W(t;\gamma,\mu,a) = \mathbb{E}_a\left[\int_t^\infty e^{-r(s-t)}\Big(\gamma(s) - h(a(s))\Big)ds \,\Big|\, \mathcal{F}(t)\right]. \tag{24}$$

AP の継続価値が (24) 式で定義されるとき，$\mathcal{F}(t)$ 可測な適合過程 $\{Y(t)\}$ が存在し，$W(t;\gamma,p,a)$ は以下のように展開される（**命題 1**）：

$$dW(t;\gamma,\mu,a) = \Big[rW(t;\gamma,\mu,a) - u(\gamma(t)) + h(a(t))\Big]dt + \sigma N(0)Y(t)dZ(t). \tag{25}$$

また，誘因両立制約を満たす a は，以下が成り立つとき最適である（**命題 2**）：

$$a(t) \in \underset{\tilde{a}(t)\in[0,\overline{a}]}{\arg\max}\; q(\tilde{a}(t),\mu(t))Y(t)N(0) - h(\tilde{a}(t)),\ 0 \le t < \infty \tag{26}$$

これから，$Y(t) = \frac{h'(a(t))}{q_a(a(t),\mu(t))N(0)} = y(a(t),\mu(t)) > 0$.

SPF は効用 (23) 式を変換した以下の評価関数を最大化するものとする：

$$J(W) = -\rho^{-1}\ln\bigg(-\mathbb{E}\bigg\{-\exp\bigg[-\rho\int_t^\infty e^{-r(s-t)}\Big((1-\beta)q(a(s),\mu(s))N(0) - \gamma(s) - c(\mu(t))\Big)ds\bigg]+1\bigg\}+1\bigg). \tag{27}$$

ここで，SPF の効用最大化問題を次のリスク-センシティブ確率制御問題として定式化する：

$$\Pi(W) = \max_{\gamma,\mu,a} J(W) = -\rho^{-1}\ln\Big(-\psi(W)+1\Big) \tag{28}$$

subject to

$$dW(t) = \Big[rW(t;\gamma,\mu,a) - u(\gamma(t)) + h(a(t))\Big]dt + \sigma N(0)y(a(t),\mu(t))dZ(t). \tag{29}$$

但し，
$$\psi(W) = \max_{\gamma,p,a}\mathbb{E}\bigg\{-\exp\bigg[-\rho\int_t^\infty e^{-r(s-t)}\Big((1-\beta)q(a(s),\mu(s))N(0) - \gamma(s) - c(\mu(t))\Big)ds\bigg]+1\bigg\}. \tag{30}$$

さらに，$\Psi(W) = \psi(W) - 1$，すなわち，

$$\Psi(W) = \max_{\gamma,p,a}\mathbb{E}\bigg\{-\exp\bigg[-\rho\int_t^\infty e^{-r(s-t)}\Big((1-\beta)q(a(s),\mu(s))N(0) - \gamma(s) - c(\mu(t))\Big)ds\bigg]\bigg\}. \tag{31}$$

この問題を動的計画法により解くために，次の HJB 方程式を用いる：

$$\max_{\gamma,\mu,a}\Big[rW - u(\gamma) + h(a)\Big]\Psi'(W) + \frac{1}{2}\sigma^2 N(0)^2 y(a,\mu)^2 \Psi''(W) - \rho\Big((1-\beta)q(a,\mu)N(0) - \gamma - c(\mu)\Big)\Psi(W) = 0. \tag{32}$$

5.3 リスク-センシティブ確率制御問題の解

HJB 方程式 (32) 式は一意で有界な解を持ち，さらに，HJB 方程式 (32) 式を満足する配分 $\gamma(t)$，購入サポート $\mu(t)$ 及び開発努力 $a(t)$ が $t \in [0,\infty)$ において対応する継続価値 $W(t)$ に関して実行可能ならば，配分 $\gamma(t)$，購入サポート $\mu(t)$ 及び開発努力 $a(t)$ は SPF の効用最大化問題の最適解である（**命題 3**）．

$\Pi(W)$ は $\Psi(W)$ を単調変換したものであるから，$\Pi(W)$ は $\Psi(W)$ と同様の性質を持ち，従って，一意で有界な解を持つ．よって，$\Pi(W)$ は (32) 式と同値な次の HJB 方程式を満たす：

$$\max_{\gamma,\mu,a}\Big[rW - u(\gamma) + h(a)\Big]\Pi'(W) + \frac{1}{2}\rho\sigma^2 N(0)^2 y(a,\mu)^2(\Pi'(W))^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 N(0)^2 y(a,\mu)^2 \Pi''(W) + [(1-\beta)q(a,\mu)N(0) - \gamma - c(\mu)] = 0. \tag{33}$$

従って，SPF の問題は HJB 方程式 (33) 式の解を求めることに帰着する．解は数値計算によって求めることができる．図 4 は各関数，パラメータを特定化したときの値関数 $\Pi(W)$，及び最適努力，最適配分を示している．

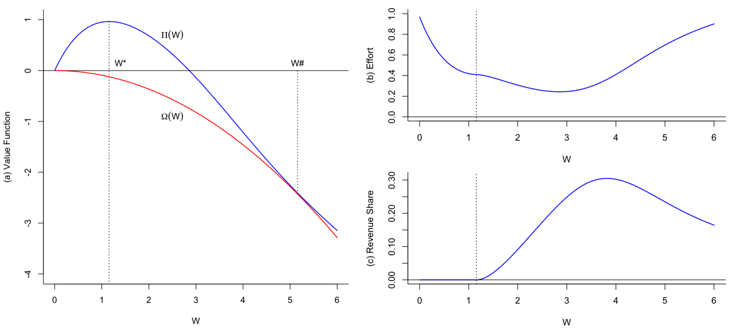

図 4　$q(a,\mu) = a + \mu, u(\gamma) = \sqrt{\gamma}, h(a) = 0.5a^2 + 0.5a, c(\mu) = 5\mu^2, r = 0.1, \beta = 0.1, \rho = 0.05, \sigma = 1, N(0) = 1$ のときの (a) SPF の値関数，(b) 最適努力，(c) 最適配分戦略

5.4 SPF のリスク感度の影響

SPF のリクス感度が異なるとき，最適解にどのような影響があるだろうか．一般に，リスクを回避する傾向が強いほど，収益が大きくなっても効用がそれほど高くならないので，あまり大きな収益を求めない．従って，リスク感度の高い SPF は感度の低い SPF と同等以下の収益で満足すると予想できる．

実際にどうなるか前の数値例を用いてシミュレーションしてみると，予想と異なり，ρ が大きいほど $\Pi(W^*)$ が大きくなった．また，ρ が大きいほど $\Pi'(0)$ と W^* が大きくなっている．これは，より大きな W^* を AP に推奨することによって，SPF は AP にリスクを転嫁することができるからである．W^* がより大きいことは AP の事業開始時の努力水準がより高いことを意味するが，それは $\Pi'(0)$ をより大きくし，その結果，$\Pi(W)$ もより大きくなる．

5.5 おわりに

本章では，スマートフォン市場におけるリスク回避的な SPF と AP の間の収益配分問題を，AP の継続価値を状態変数とするリスク-センシティブ確率制御問題として定式化し，有界で一意な解が存在することが示され，数値シミュレーションによって具体的に解を求めることができた．さらに，SPF のリスク感度が大きいほど，すなわち SPF がリスク回避的であるほど，SPF の値関数はより大きくなることが数値シミュレーションによって示された．

6 結論

本論文は，これまで必ずしも十分な研究がなされていない取引インセンティブ問題の分析を行った．現実の両面性市場は，プラットフォーム間競争，マルチホーミング，同一プラットフォーム上での参加者間競争など，極めて複雑かつ多様で，分析には複数の非線形 HJB 方程式の解を同時に求める必要があり，解析解のみならず，数値計算も複雑化する．しかしながら，プラットフォーム間競争やマルチホーミングはプラットフォーム戦略の立案にとっては極めて重要なテーマであり，今後の研究が望まれるところである．

参考文献

[1] M. Armstrong: "Competiton in Two-Sided Markets", *Rand Journal of Economics*, Vol.37, No.3, pp.669–691 (2006)

[2] A. Hagiu: "Two-Sided Platform : Product Variety and Pricing Structures", *Journal of Economics & Management Strategy*, Vol.18, No.4, pp.1011–1043 (2009)

[3] J. Rochet and J.Tirol: "Platform Competiton in Two-Sided Markets", *Journal of Eurapean Economic Association*, Vol.1, No.4, pp.990–1029 (2003)

[4] J. Rochet and J. Tirol: "Two-Sided Markets : a progress report", *Rand Journal of Economics*, Vol.37, No.3, pp.645–667 (2006)

[5] Y. Sannikov: "A Continuous Time Version of the Principal-Agent Problem", *Review of Economic Journal Studies*, Vol.75, No.3, pp.957–984 (2008)

[6] Masaru Unno and Hua Xu: "Dynamic Optimal Revenue-Sharing Strategy in E-Commerce", in A. König, A. Dengel, K. Hinkelmann, K. Kise, R.J. Howlett, L.C. Jain eds. *Knowledge-Based and Intelligent Information and Engineering Systems*, Part III, Lecture Notes in Artificial Intelligence, pp.310–319, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2011)

[7] 海野 大，シュウ ファ："インターネット市場におけるレイヤ間収益配分と ISP の投資インセンティブ"，電気学会論文誌 C (電子・情報・システム部門誌)，Vol.131, No.4, pp.918-925 (2011)